



MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE

Matematika tantárgyverseny
Megyei szakasz, 2014. március 8.

XI. OSZTÁLY

1. feladat. (a) Adj példát olyan $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixokra, amelyekre $A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) Igazold, hogy ha az $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixok esetén $A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, akkor $AB \neq BA$.

Gazeta Matematică

2. feladat. (a) Igazold, hogy ha $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan függvény, amelyre a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + f(2x)$ és $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) + f(4x)$ függvények folytonosak \mathbb{R} -en, akkor f is folytonos \mathbb{R} -en!

(b) Adj példát egy nem folytonos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre, amelyre létezik olyan $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, hogy bármely $a \in I$ esetén a $g_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_a(x) = f(x) + f(ax)$ függvény folytonos \mathbb{R} -en!

3. feladat. (a) Adott az $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ mátrix úgy, hogy $A \neq aI_2$, bármely $a \in \mathbb{C}$ esetén. Igazold, hogy egy $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ mátrix esetén $AX = XA$ akkor és csak akkor, ha léteznek az α és α' komplex számok úgy, hogy $X = \alpha A + \alpha' I_2$.

(b) Adottak az $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ mátrixok úgy, hogy $AB \neq BA$, $AC = CA$ és $BC = CB$. Igazold, hogy $CX = XC$ bármely $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ esetén!

4. feladat. Legyen $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ egy szigorúan növekvő függvény. Igazold, hogy:

(a) Létezik olyan $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ csökkenő, 0-hoz tartó, szigorúan pozitív valós számokból álló sorozat, amelyre $y_n \leq 2y_{f(n)}$ bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén!

(b) Ha $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egy 0-hoz tartó csökkenő valós számsorozat, akkor létezik olyan $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ csökkenő, 0-hoz tartó, valós számsorozat, amelyre $x_n \leq y_n \leq 2y_{f(n)}$ bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén!

Munkaidő 4 óra.

Minden feladatra 7 pont szerezhető.